Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ**

КАФЕДРА **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **02.03.01 МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ**

О Т Ч Е Т

по домашней работе № 2 . 2

Дисциплина: Теория случайных процессов

Вариант: 15

Студент	ФН11-63Б		А.А.Серебряков
	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)
Преподаватель			Т.В. Облакова
		(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)

Москва, 2022

Задача 2. Моделирование двумерного винеровского процесса

Задание

1. На интервале $[0, T]$ смоделируйте n траекторий двумерного винеровского процесса интенсивности σ с шагом h.
2. Выведите на печать 5-7 траекторий (мультимедийность приветствуется)
3. Для каждой траектории вычислите

1) вариации компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|\right)$

   Найдите среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}(h), Var^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям

2) Найдите суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|^2, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|^2\right)$

   Найдите среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}(h), SqVar^{(2)}(h)\right)$

4. Уменьшите значение h в два раза и вычислите $\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right), Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ и $\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right), SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$. Сравните полученные значения для исходного и уменьшенного шага и объясните результат.
5. Вычислите теоретическую вероятность $P\left(\left|\overline{W}_T\right| \geq z\right)$ и сравните ее с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня z в момент T.

Вар	T	n	σ	h	z
15	14	100	0.25	0.1	1.5

Решение

```
> N = tt/h
> N
[1] 140
```

Смоделируем 2N пар $\left(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}\right)$ с независимыми компонентами, распределенными по закону $N(0, \sigma\sqrt{\frac{h}{2}})$.

```
> pair_ksi_vec = t(replicate(2*N,sapply(c(1,2), function(y) rnorm(1, 0, sqrt(h/2)*sigma))))
> head(pair_ksi_vec)
            [,1]         [,2]
[1,]  0.01002085 -0.004974260
[2,]  0.01912408  0.003318008
[3,]  0.01807590 -0.026046220
[4,] -0.01656578  0.018281666
[5,]  0.07803362  0.021068180
[6,] -0.11478336  0.010055699
> tail(pair_ksi_vec)
              [,1]         [,2]
[275,]  0.07459602 -0.063751541
[276,]  0.01460234 -0.074098956
[277,] -0.03432651  0.066332420
[278,]  0.06286677  0.060742110
[279,]  0.05098836  0.006568664
[280,]  0.03756395 -0.020008524
```

При моделирования винеровского процесса с шагом h используем попарные суммы $\left(\xi'_k{}^{(1)}, \xi'_k{}^{(2)}\right) = \left(\xi_{2k-1}{}^{(1)} + \xi_{2k}{}^{(1)}, \xi_{2k-1}{}^{(2)} + \xi_{2k}{}^{(2)}\right)$, компоненты которых по свойствам нормального закона распределены по закону $N(0, \sigma\sqrt{h})$.

```
> for (k in 1:N) {
+   pair_ksi_vec2[k,] = (pair_ksi_vec[2*k-1,]+pair_ksi_vec[2*k,])
+ }
> head(pair_ksi_vec2)
             [,1]         [,2]
[1,]  0.029144931 -0.001656253
[2,]  0.001510113 -0.007764554
[3,] -0.036749737  0.031123878
[4,] -0.050221476 -0.054566875
[5,]  0.023788172  0.033438875
[6,] -0.146349195 -0.010525511
> tail(pair_ksi_vec2)
             [,1]        [,2]
[135,] 0.06177799 -0.19887372
[136,] 0.09557505 -0.02984695
[137,] 0.02339826  0.04970344
[138,] 0.08919836 -0.13785050
[139,] 0.02854026  0.12707453
[140,] 0.08855231 -0.01343986
```

Смоделируем одну траекторию двумерного винеровского процесса по формуле $\left(W_{(k+1)h}{}^{(1)}, W_{(k+1)h}{}^{(2)}\right) = \left(W_{kh}{}^{(1)}, W_{kh}{}^{(2)}\right) + \left(\xi'_k{}^{(1)}, \xi'_k{}^{(2)}\right)$, учитывая, что $\left(W_0{}^{(1)}, W_0{}^{(2)}\right) = (0{,}0)$.

```
> pair_w_vec2 = apply(rbind(c(0,0),pair_ksi_vec2), 2, cumsum)
> head(pair_w_vec2)
             [,1]          [,2]
[1,]  0.000000000  0.0000000000
[2,]  0.029144931 -0.0016562528
[3,]  0.030655044 -0.0094208070
[4,] -0.006094693  0.0217030713
[5,] -0.056316169 -0.0328638037
[6,] -0.032527997  0.0005750708
> tail(pair_w_vec2)
             [,1]       [,2]
[136,] -0.6891622 -0.5605803
[137,] -0.5935872 -0.5904273
[138,] -0.5701889 -0.5407238
[139,] -0.4809906 -0.6785743
[140,] -0.4524503 -0.5514998
[141,] -0.3638980 -0.5649397
```

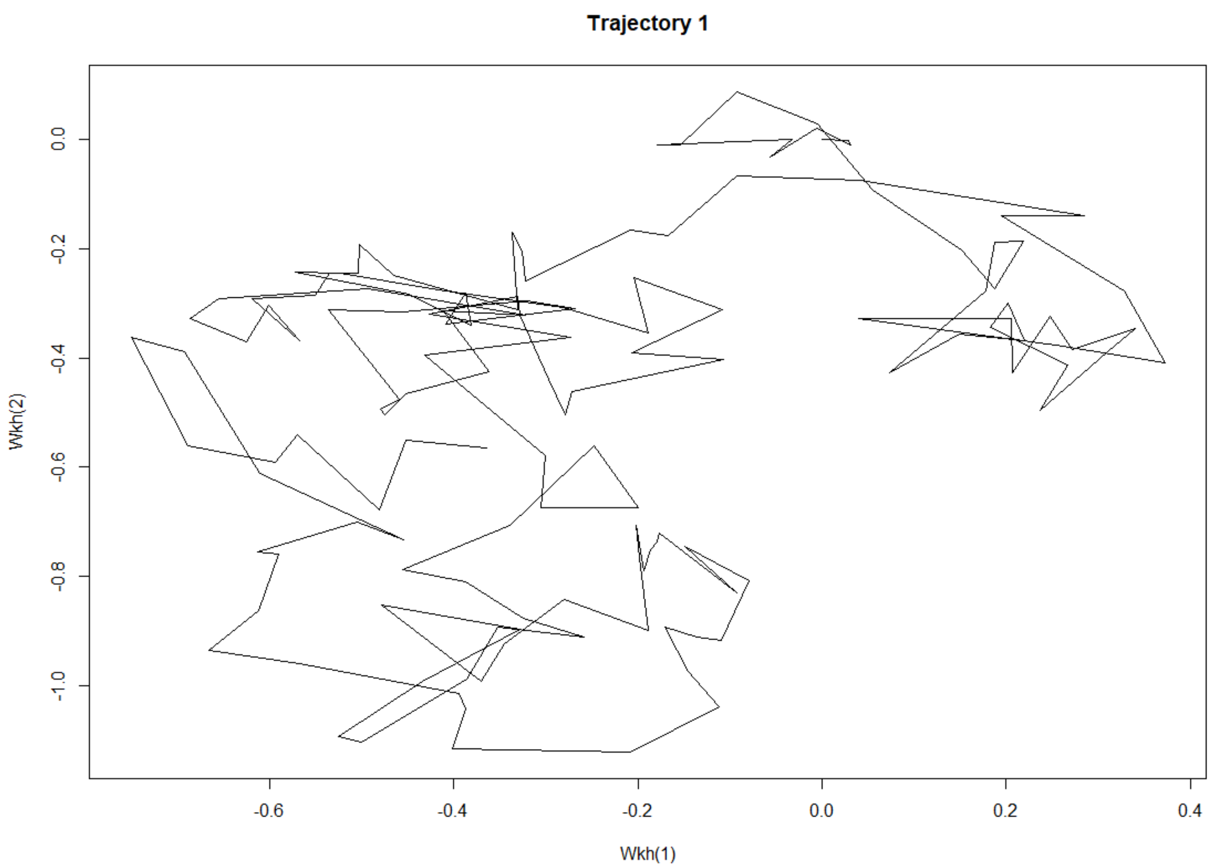
Теперь аналогично получим $n = 100$ траекторий.

```
> pairfun = function()
+ {
+   pair_ksi_vec_k = t(replicate(2*N,sapply(c(1,2), function(y) rnorm(1, 0, sqrt(h/2)*sigma))))
+   pair_ksi_vec_k2 = array(c(rep(0, N),rep(0, N)),dim=c(N,2))
+   for (k in 1:N) {
+     pair_ksi_vec_k2[k,] = (pair_ksi_vec_k[2*k-1,]+pair_ksi_vec_k[2*k,])
+   }
+   return(apply(rbind(c(0,0),pair_ksi_vec_k2), 2, cumsum))
+ }
> pairs_list1 = replicate(n, pairfun(), F)
```

Выведем на печать несколько полученных траекторий.

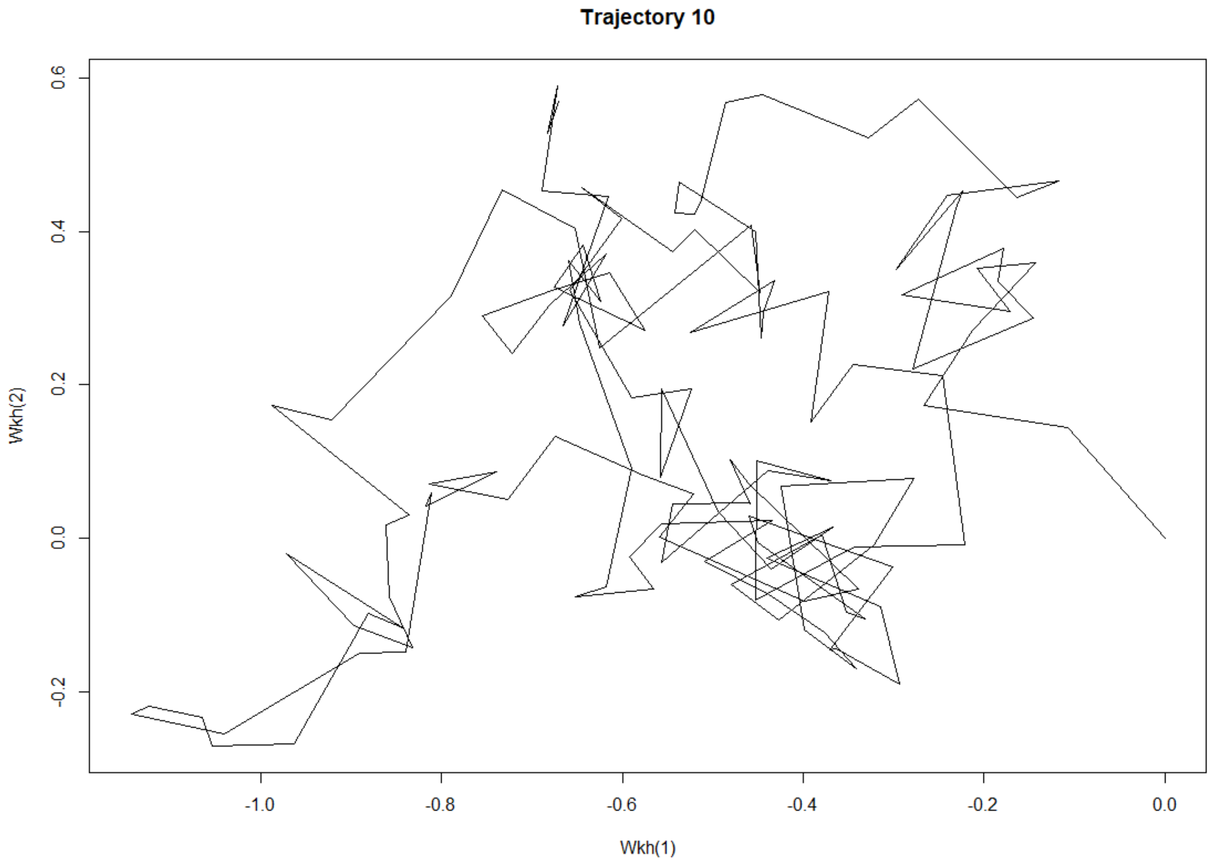
Траектория 1:

```
> head(pairs_list1[[1]])
             [,1]          [,2]
[1,]  0.000000000  0.0000000000
[2,]  0.029144931 -0.0016562528
[3,]  0.030655044 -0.0094208070
[4,] -0.006094693  0.0217030713
[5,] -0.056316169 -0.0328638037
[6,] -0.032527997  0.0005750708
> tail(pairs_list1[[1]])
             [,1]       [,2]
[136,] -0.6891622 -0.5605803
[137,] -0.5935872 -0.5904273
[138,] -0.5701889 -0.5407238
[139,] -0.4809906 -0.6785743
[140,] -0.4524503 -0.5514998
[141,] -0.3638980 -0.5649397
```



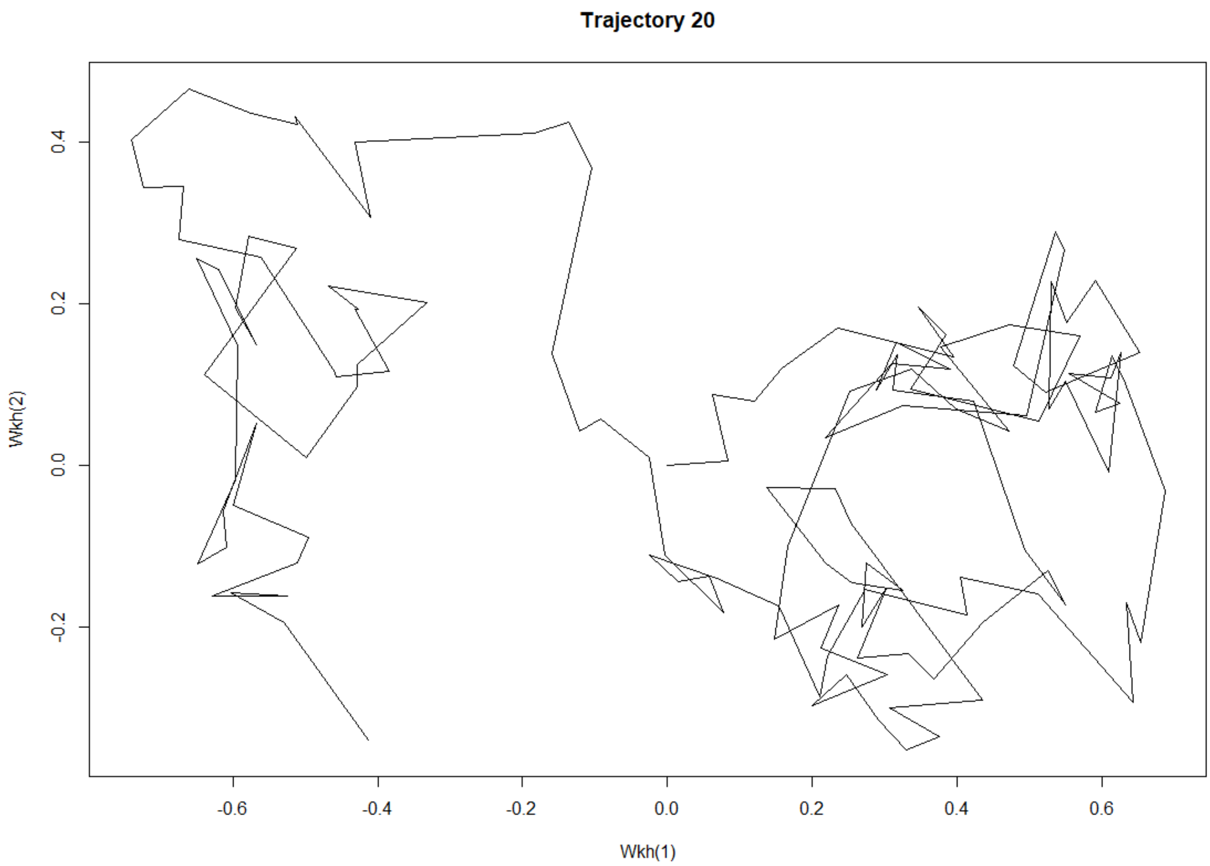
Траектория 10:

```
> head(pairs_list1[[10]])
           [,1]      [,2]
[1,]  0.0000000 0.0000000
[2,] -0.1072278 0.1447570
[3,] -0.2665777 0.1733338
[4,] -0.2124798 0.2718504
[5,] -0.1426337 0.3600407
[6,] -0.2072879 0.3515872
> tail(pairs_list1[[10]])
             [,1]      [,2]
[136,] -0.6651744 0.2766840
[137,] -0.6151957 0.4460161
[138,] -0.6886247 0.4533523
[139,] -0.6714539 0.5902656
[140,] -0.6821591 0.5288499
[141,] -0.6701480 0.5704733
```



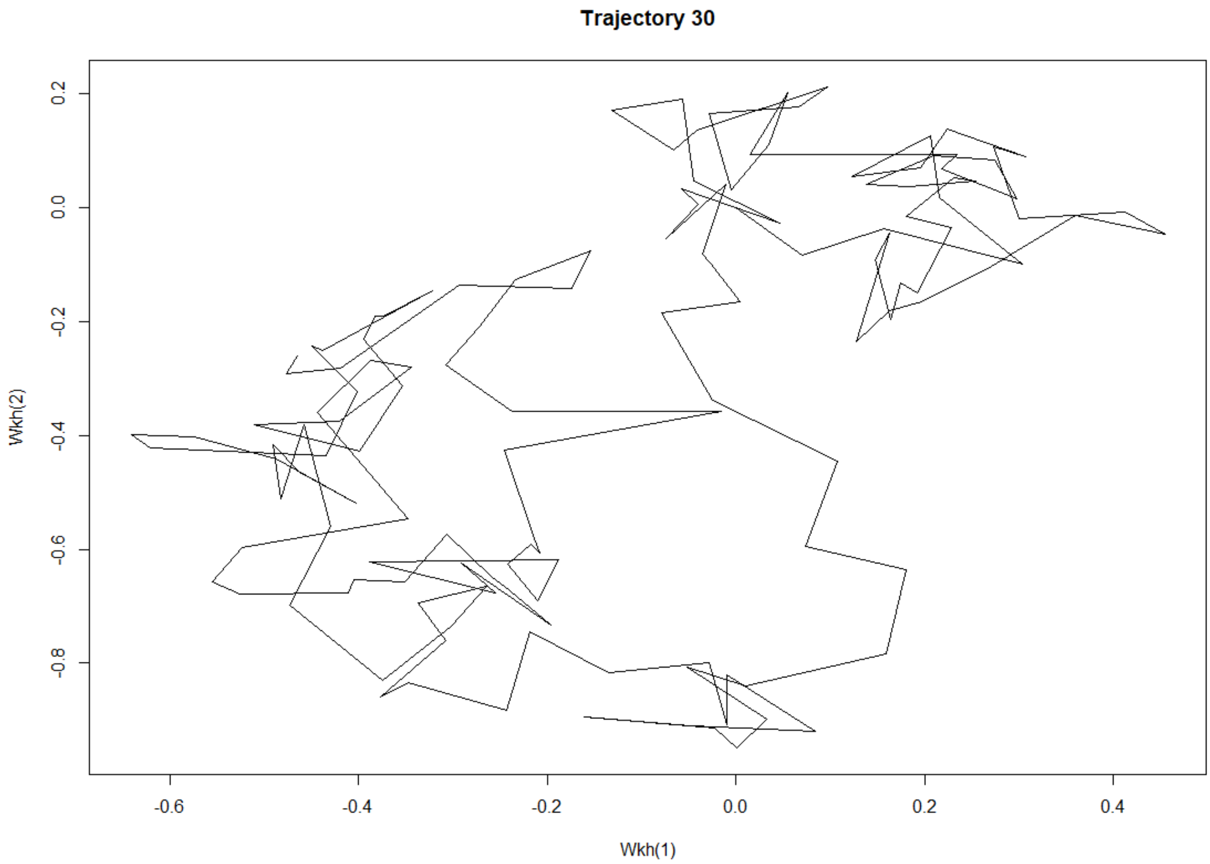
Траектория 20:

```
> head(pairs_list1[[20]])
           [,1]        [,2]
[1,] 0.00000000 0.000000000
[2,] 0.08370757 0.005074983
[3,] 0.06205852 0.087754781
[4,] 0.12023378 0.078622303
[5,] 0.15860060 0.119538782
[6,] 0.23504667 0.169271227
> tail(pairs_list1[[20]])
             [,1]       [,2]
[136,] -0.5116086 -0.1213910
[137,] -0.6281920 -0.1621712
[138,] -0.5246391 -0.1626308
[139,] -0.6026199 -0.1574664
[140,] -0.5285303 -0.1948345
[141,] -0.4135751 -0.3405102
```



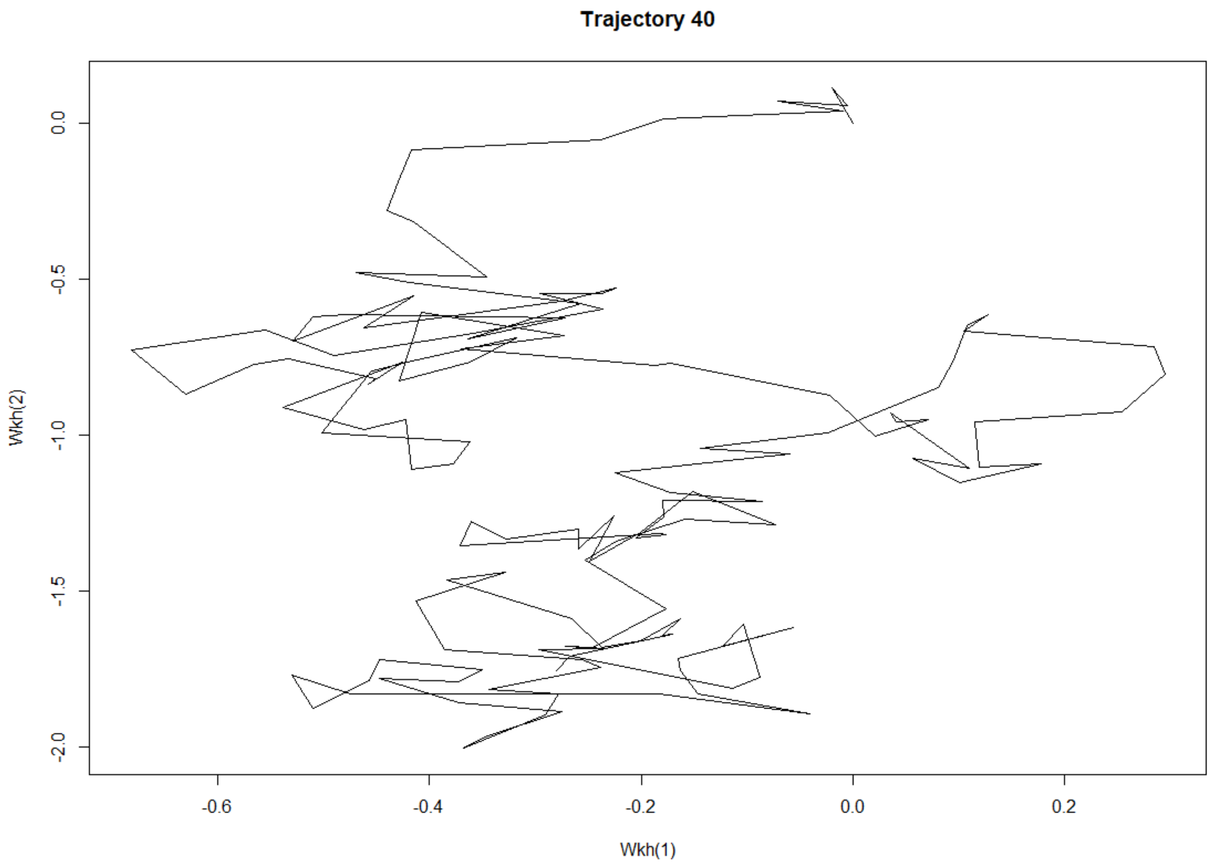
Траектория 30:

```
> head(pairs_list1[[30]])
           [,1]        [,2]
[1,] 0.00000000  0.00000000
[2,] 0.06979814 -0.08419265
[3,] 0.15711374 -0.03722710
[4,] 0.24329211 -0.07506722
[5,] 0.30335685 -0.10038826
[6,] 0.21572056  0.01753192
> tail(pairs_list1[[30]])
             [,1]        [,2]
[136,] -0.1535933 -0.07625802
[137,] -0.1738381 -0.14159728
[138,] -0.2932123 -0.13626246
[139,] -0.4188895 -0.28224869
[140,] -0.4764759 -0.29245098
[141,] -0.4649444 -0.26104146
```



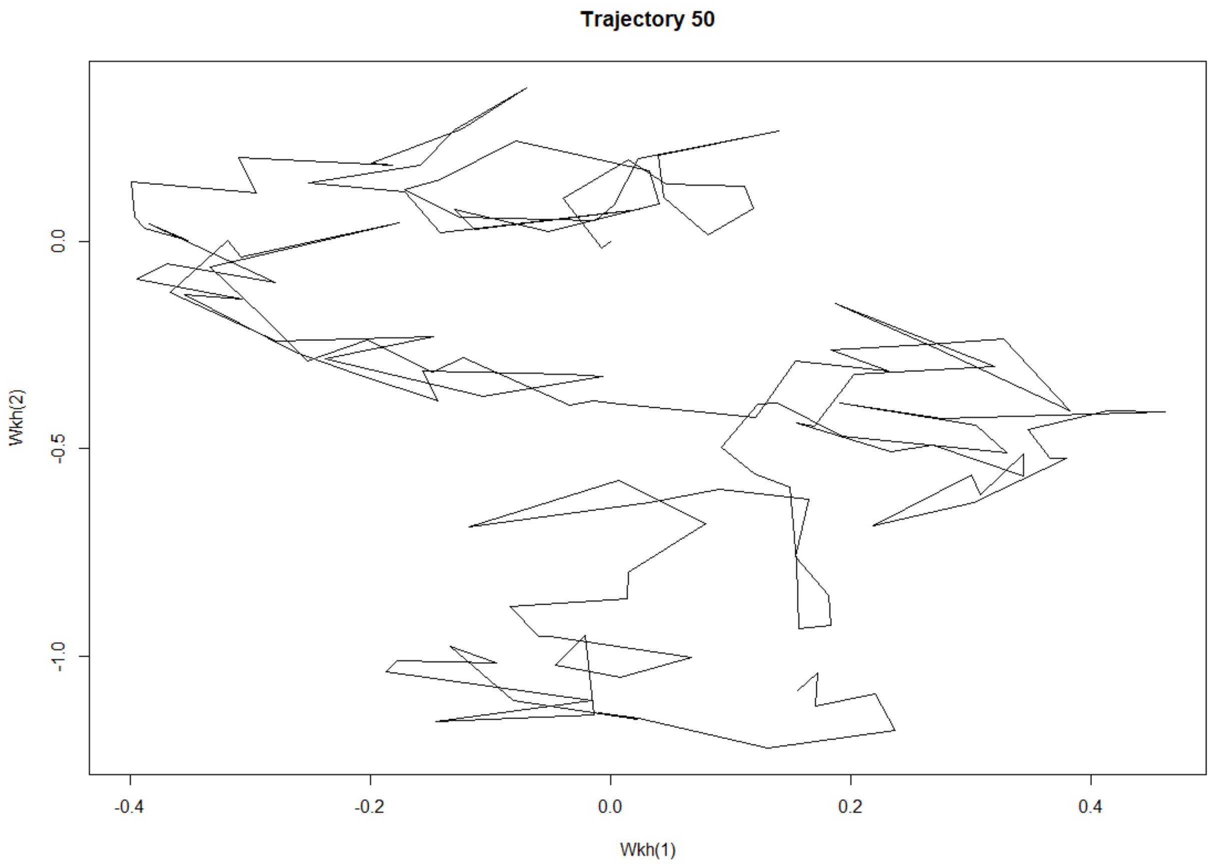
Траектория 40:

```
> head(pairs_list1[[40]])
             [,1]       [,2]
[1,]  0.000000000 0.00000000
[2,] -0.019281385 0.11212444
[3,] -0.005493463 0.05565822
[4,] -0.071381715 0.06838793
[5,] -0.009743931 0.03755073
[6,] -0.179104566 0.01235824
> tail(pairs_list1[[40]])
             [,1]      [,2]
[136,] -0.2005704 -1.658591
[137,] -0.1629922 -1.588900
[138,] -0.1798576 -1.643167
[139,] -0.1698889 -1.640438
[140,] -0.2671130 -1.708236
[141,] -0.2804730 -1.754766
```



Траектория 50:

```
> head(pairs_list1[[50]])
             [,1]        [,2]
[1,]  0.000000000  0.00000000
[2,] -0.007561626 -0.01660567
[3,] -0.040064051  0.10464618
[4,]  0.014342034  0.19571409
[5,]  0.045579902  0.13903769
[6,]  0.111470888  0.13263063
> tail(pairs_list1[[50]])
            [,1]      [,2]
[136,] 0.1310972 -1.221210
[137,] 0.2367347 -1.178576
[138,] 0.2198037 -1.090454
[139,] 0.1706937 -1.119960
[140,] 0.1723469 -1.041043
[141,] 0.1551375 -1.082681
```



Вычислим вариации компонент $\left(\sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(1)} - W_{kh}^{(1)}\right|, \sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(2)} - W_{kh}^{(2)}\right|\right)$.

```
> var_fun = function(x)
+ {
+   sum(abs(diff(x)))
+ }
> vars = t(sapply(pairs_list1, function(x) apply(x, 2, var_fun)))
> head(vars)
         [,1]      [,2]
[1,] 9.413926  8.546291
[2,] 9.146729  9.348074
[3,] 9.175414  7.890390
[4,] 9.664958 10.033431
[5,] 8.263940  9.572637
[6,] 9.007945  9.095146
> tail(vars)
           [,1]      [,2]
 [95,] 8.409525  9.603672
 [96,] 9.375926  9.100192
 [97,] 8.030205 10.097853
 [98,] 8.007787  7.699147
 [99,] 8.061259  8.807476
[100,] 8.832435  8.919321
```

Найдем среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}(h), Var^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям.

```
> var12h = colMeans(vars)
> var12h
[1] 8.792783 8.857202
```

Найдем суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|^2, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|^2\right)$.

```
> sq_var_fun = function(x)
+ {
+   sum(abs(diff(x))^2)
+ }
>
> sq_vars = t(sapply(pairs_list1, function(x) apply(x, 2, sq_var_fun)))
> head(sq_vars)
          [,1]      [,2]
[1,] 0.9961922 0.8047819
[2,] 0.9531883 0.9386033
[3,] 0.8762492 0.7394343
[4,] 1.1199846 1.1061519
[5,] 0.7634145 0.9680272
[6,] 1.0140174 0.8823921
> tail(sq_vars)
            [,1]      [,2]
 [95,] 0.7899256 1.0170067
 [96,] 0.9266847 0.8659436
 [97,] 0.7928911 1.0431793
 [98,] 0.6870626 0.6754089
 [99,] 0.7610414 0.9539626
[100,] 0.9044744 0.8734707
```

Найдем среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}(h), SqVar^{(2)}(h)\right)$.

```
> sq_var12h = colMeans(sq_vars)
> sq_var12h
[1] 0.8679596 0.8729810
```

Проделаем всё то же самое при для шага $\frac{h}{2}$.

```
> h = 0.1/2
> h
[1] 0.05
> N = tt/h
> N
[1] 280
```

Вычислим вариации компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|\right)$.

```
> vars2 = t(sapply(pairs_list2, function(x) apply(x, 2, var_fun)))
> head(vars2)
         [,1]     [,2]
[1,] 13.12436 12.65323
[2,] 13.32215 12.67406
[3,] 12.21307 13.20012
[4,] 12.49679 13.01865
[5,] 12.17974 12.86130
[6,] 11.49786 11.47788
> tail(vars2)
           [,1]     [,2]
 [95,] 12.58169 13.33500
 [96,] 11.78453 13.24832
 [97,] 10.76015 12.82084
 [98,] 13.25676 12.98626
 [99,] 12.50706 12.14302
[100,] 11.57037 10.93173
```

Найдем среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}(h), Var^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям.

```
> var12h2 = colMeans(vars2)
> var12h2
[1] 12.45673 12.57424
```

Найдем суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|^2, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|^2\right)$.

```
> sq_vars2 = t(sapply(pairs_list2, function(x) apply(x, 2, sq_var_fun)))
> head(sq_vars2)
          [,1]      [,2]
[1,] 0.9746903 0.8716926
[2,] 0.9981169 0.9227931
[3,] 0.8887160 0.9252096
[4,] 0.8847531 0.8658919
[5,] 0.8017480 0.9343464
[6,] 0.7822308 0.7268646
> tail(sq_vars2)
            [,1]      [,2]
 [95,] 0.8834557 0.9385719
 [96,] 0.7774692 0.9569817
 [97,] 0.6804657 0.9129462
 [98,] 1.0054726 0.9115758
 [99,] 0.8772477 0.8184663
[100,] 0.7829949 0.7020641
```

Найдите среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}(h), SqVar^{(2)}(h)\right)$.

```
> sq_var12h2 = colMeans(sq_vars2)
> sq_var12h2
[1] 0.8733458 0.8811882
```

Сравним полученные значения для исходного и уменьшенного шага.

```
   mean_vars_h1 mean_vars_h2 mean_sq_vars_h1 mean_sq_vars_h2
1:     8.792783     12.45673       0.8679596       0.8733458
2:     8.857202     12.57424       0.8729810       0.8811882
```

В относительных величинах:

```
   mean_vars_h1 mean_sq_vars_h1
1:    0.7058663       0.9938327
2:    0.7043928       0.9906862
```

Из полученных таблиц видно, что отличия в средних значениях суммы квадратов приращений компонент значительно меньше, чем отличия в средних значениях вариаций компонент. Это связано с тем, что траектории винеровского процесса имеют неограниченную вариацию, а суммы квадратов приращений при измельчении разбиения стремятся к значению $\sigma^2 T = 0.25^2 \cdot 14 = 0.875$.

Вычислим теоретическую вероятность $P(|\overline{W}_T| \geq z)$. $|\overline{W}_T| = \sqrt{(W_T^{(1)})^2 + (W_T^{(2)})^2}$,

$W_T^{(1)} \sim N(0, \sigma\sqrt{T}), W_T^{(1)} \sim N(0, \sigma\sqrt{T})$, поэтому $\frac{(W_T^{(1)})^2}{\sigma^2 T} + \frac{(W_T^{(2)})^2}{\sigma^2 T} \sim \chi^2(2)$.

Тогда $P(|\overline{W}_T| \geq z) = P\left(\frac{\left(W_T^{(1)}\right)^2}{\sigma^2 T} + \frac{\left(W_T^{(2)}\right)^2}{\sigma^2 T} \geq \frac{z^2}{\sigma^2 T}\right) = 1 - F_{\chi^2(2)}(\frac{z^2}{\sigma^2 T})$.

```
> theor_prob = 1 - pchisq(z^2/(sigma^2 * tt),2)
> theor_prob
[1] 0.276453
```

Найдем эмпирическую вероятность достижения указанного уровня z в момент T.

Для этого найдем количество последних точек траекторий, радиус-вектор которых не меньше z:

```
> c = 0
> for (i in 1:100){
+   if (sqrt(pairs_list1[[i]][141,1]^2 + pairs_list1[[i]][141,2]^2) >= z){
+     c = c + 1
+   }}
> c
[1] 34
```

И разделим на количество траекторий:

```
> empiric_prob = c / n
> empiric_prob
[1] 0.34
```

Получили, что теоретическое и эмпирическое значения близки.