Серебряков Артём
ФН11-53Б
Вариант 11
Постановка задачи
Найти фундаментальное решение E(t) указанного дифференциального оператора:
$\#L= (a1\cdot\frac{d}{dt}+b1\Big)\times\Big(a2\cdot\frac{d}{dt}+b2\Big)\times\Big(a3\cdot\frac{d}{dt}+b3\Big)$
С помощью свертки найти решение обыкновенного дифференциального уравнения:
#Lu(t)=f(t)·Heaviside(t-t0),
описывающего поведение линейной динамической системы при включении в момент времени t0 внешнего воздействия,характеризуемого функцией f(t).Построить совмещенные графики функций E(t),f(t)*Heaviside(t-t0),u(t).
restart :
$a1 := 1$:
$b1 := 0$:
$a2 := 1$:
$b2 := 0$:
$a3 := 1$:
$b3 := 1$:
$f(t) := \exp(-t)$:
$t0 := 0$:
$Lu(t) := simplify\left(\left(a1\cdot\frac{d}{dt}u(t)+b1\cdot u(t)\right)\times\left(a2\cdot\frac{d}{dt}u(t)+b2\cdot u(t)\right)\times\left(a3\cdot\frac{d}{dt}u(t)+b3\cdot u(t)\right)\right)$:
$Lu(t) = f(t)\cdot\mathrm{Heaviside}(t-t0)$

$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2\left(\frac{d}{dt}u(t)+u(t)\right)=e^{-t}\,\mathrm{Heaviside}(t) \quad \mathbf{(1)}$$

Оператор L:
$\#L=\frac{d^3}{dt^3}+\frac{d^2}{dt^2}$
Получаем дифференциально уравнение:
uttt+utt=e^(-t)*Heaviside(t)
Решение
Найдем фундаментальное решение E(t) заданного оператора
$\#\frac{d^3E}{dt^3}+\frac{d^2E}{dt^2}=\mathrm{Dirac}(t)$
Найдем образы преобразования Лапаласа
$\#\frac{d^2}{dt^2}E(p) \Rightarrow p^2\hat{E}(p)$
$\#\frac{d^3}{dt^3}E(p) \Rightarrow p^3\hat{E}(p)$
$\#\mathrm{Dirac}(t) \Rightarrow 1$
Получаем уравнение:
$\#(p^3+p^2)\cdot\hat{E}(p)=1$
Решение этого уравнения:
$\hat{E}(p)=\frac{1}{p^3+p^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}$:

Найдем оригинал полученного решения:

$\#\frac{1}{p^2} \Rightarrow t\cdot\mathrm{Heaviside}(t)$

$\#\frac{1}{p+1} \Rightarrow \exp(-t)\cdot\mathrm{Heaviside}(t)$

$\#\frac{1}{p} \Rightarrow 1\cdot\mathrm{Heaviside}(t)$

$E(t) := t\cdot\mathrm{Heaviside}(t) + \exp(-t)\cdot\mathrm{Heaviside}(t) + 1\cdot\mathrm{Heaviside}(t) :$

$\mathit{simplify}(E(t))$

$$\mathrm{Heaviside}(t)\left(\mathrm{e}^{-t} + t + 1\right) \tag{2}$$

$\delta(x) := \mathit{piecewise}(x = 0, +\infty, x \neq 0, 0) :$

$\delta(x)$

$$\begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Проверка

$\mathit{simplify}\left(\frac{\mathrm{d}^3 E}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t^2} - \delta(t)\right)$

$$0 \tag{4}$$

Проверка пройдена

Найдем решение обыкновенного дифференциального уравнения с помощью свертки:

#Lu(t)=exp(-t) ·Heaviside(t),

$\mathit{f1}(t) := \exp(-t)\cdot\mathrm{Heaviside}(t) :$

$\#u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t - \mathrm{tau})\cdot \mathit{f1}(\mathrm{tau})\,\mathrm{dtau} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Heaviside}(t - \mathrm{tau})\left(\mathrm{e}^{-(t - \mathrm{tau})} + (t - \mathrm{tau}) + 1\right)\cdot\exp(-\mathrm{tau})$
$\cdot\mathrm{Heaviside}(\mathrm{tau})\,\mathrm{dtau}$

$\eta(t) := \mathit{piecewise}(t < 0, 0, t \geq 0, 1) :$

$\eta(t)$

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases} \tag{5}$$

$\mathit{f1}(t) := \exp(-t)\cdot\eta(t) :$

$E(t) := t\cdot\eta(t) + \exp(-t)\cdot\eta(t) + 1\cdot\eta(t) :$

$\mathit{simplify}(\mathit{f1}(\mathrm{tau}))$

$$\begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \mathrm{e}^{-\tau} & 0 \leq \tau \end{cases} \tag{6}$$

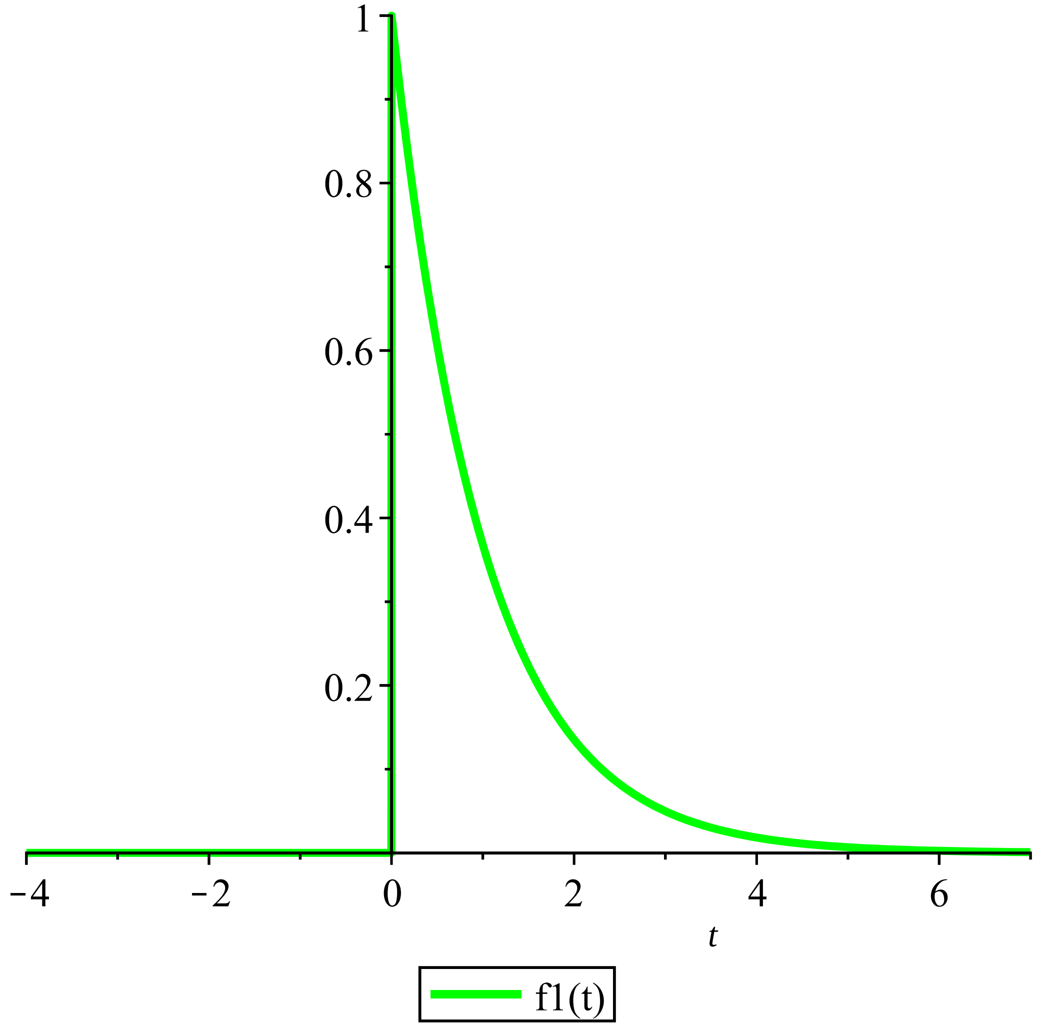
$\mathit{simplify}(E(t - \mathrm{tau}))$

$$\begin{cases} 0 & t - \tau < 0 \\ t - \tau + \mathrm{e}^{-t+\tau} + 1 & 0 \leq t - \tau \end{cases} \tag{7}$$

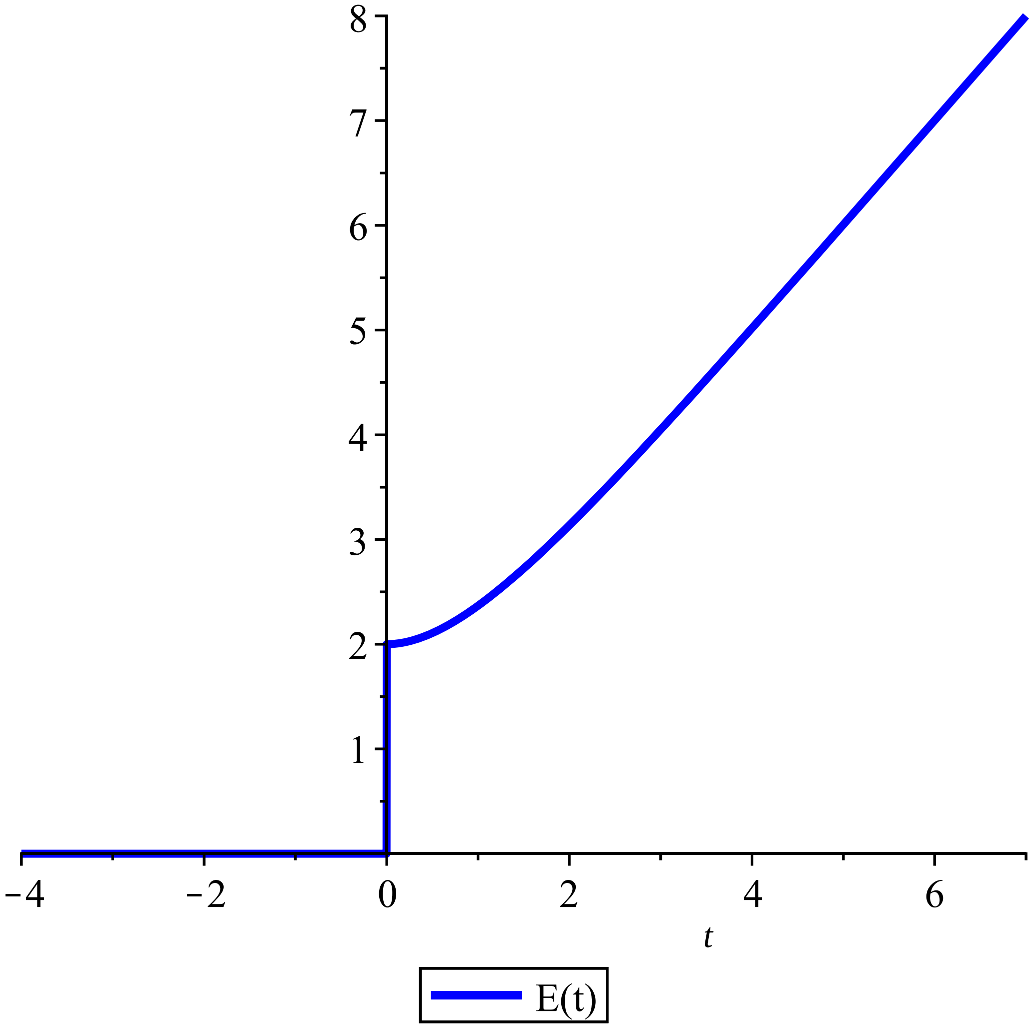
$E(t - \mathrm{tau}) := \mathit{piecewise}\left(\mathrm{tau} \leq t, t - \tau + \mathrm{e}^{-t+\tau} + 1, \mathrm{tau} > t, 0\right)$

$$\begin{cases} t - \tau + e^{-t+\tau} + 1 & \tau \leq t \\ 0 & t < \tau \end{cases} \tag{8}$$

plot(*f1*(*t*), *t* = −4 ..7, *legend* = "f1(t)", *color* = *green*, *thickness* = 3)

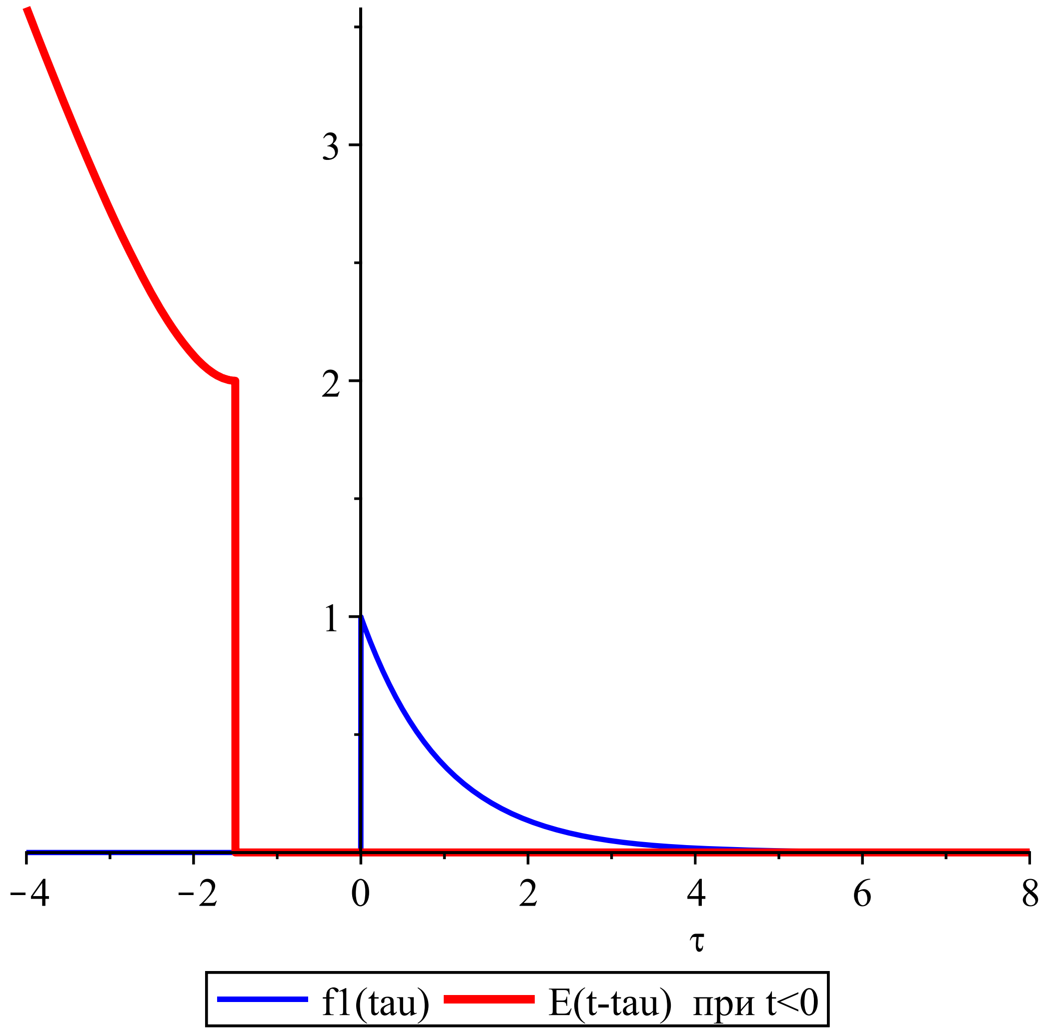


plot(*E*(*t*), *t* = −4 ..7, *legend* = "E(t)", *color* = *blue*, *thickness* = 3)



1) t<0

$plot([f1(\mathrm{tau}), eval(E(t-\mathrm{tau}), t=-1.5)], \mathrm{tau}=-4..8, thickness=[2, 3], color=[blue, red], legend$
$=["\mathrm{f1(tau)}", "\mathrm{E(t\text{-}tau)}\ \text{при}\ t<0"])$

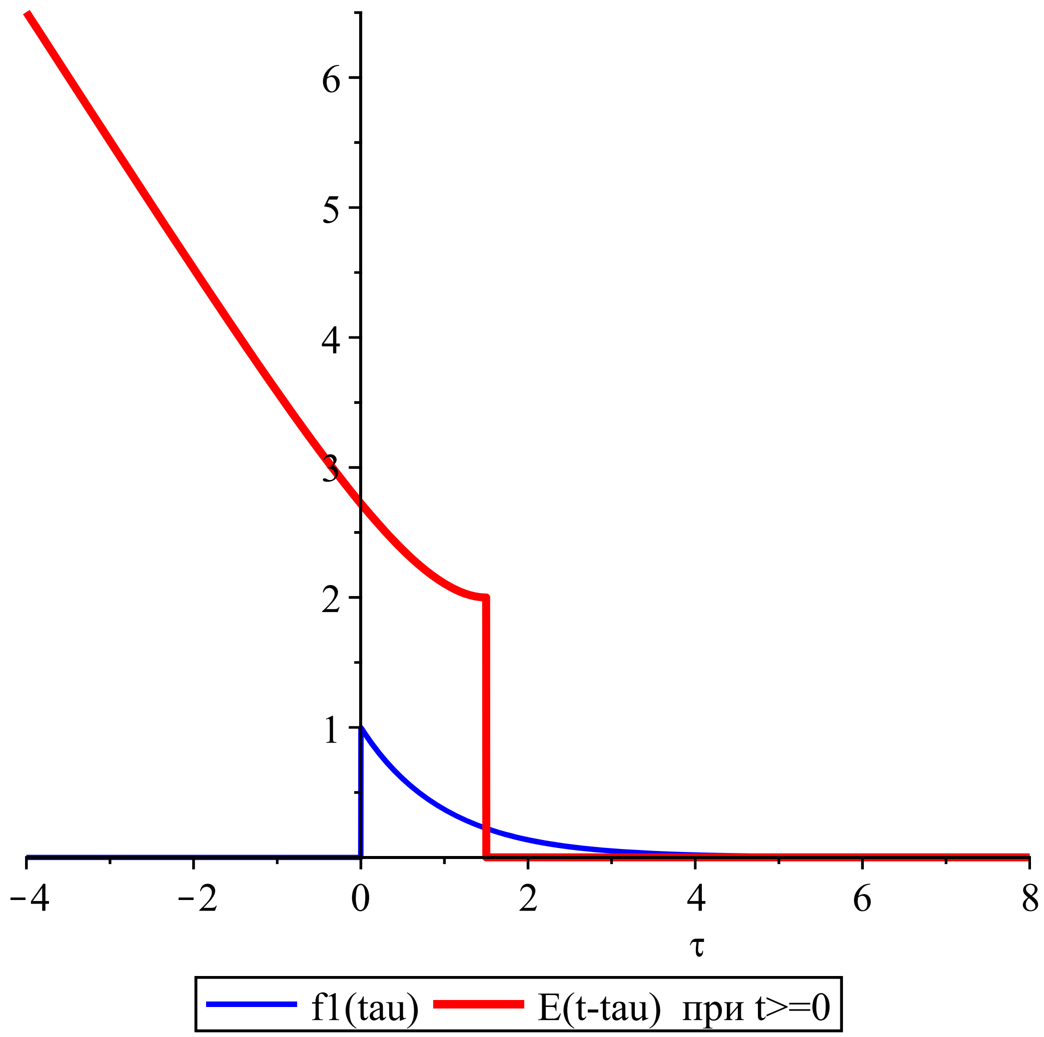


$sv1(t) := 0:$
$sv1(t)$

$$0 \tag{9}$$

2) t>=0

plot([*f1*(tau), *eval*(*E*(*t* − tau), *t* = 1.5)], tau =−4 ..8, *thickness* = [2, 3], *color* = [*blue*, *red*], *legend* = ["f1(tau)" , "E(t-tau) при t>=0"])



$sv2(t) := \int_0^t \left(t - \tau + e^{-t+\tau} + 1\right) \cdot \exp(-tau)\, dtau :$

$sv2(0)$

$$0 \tag{10}$$

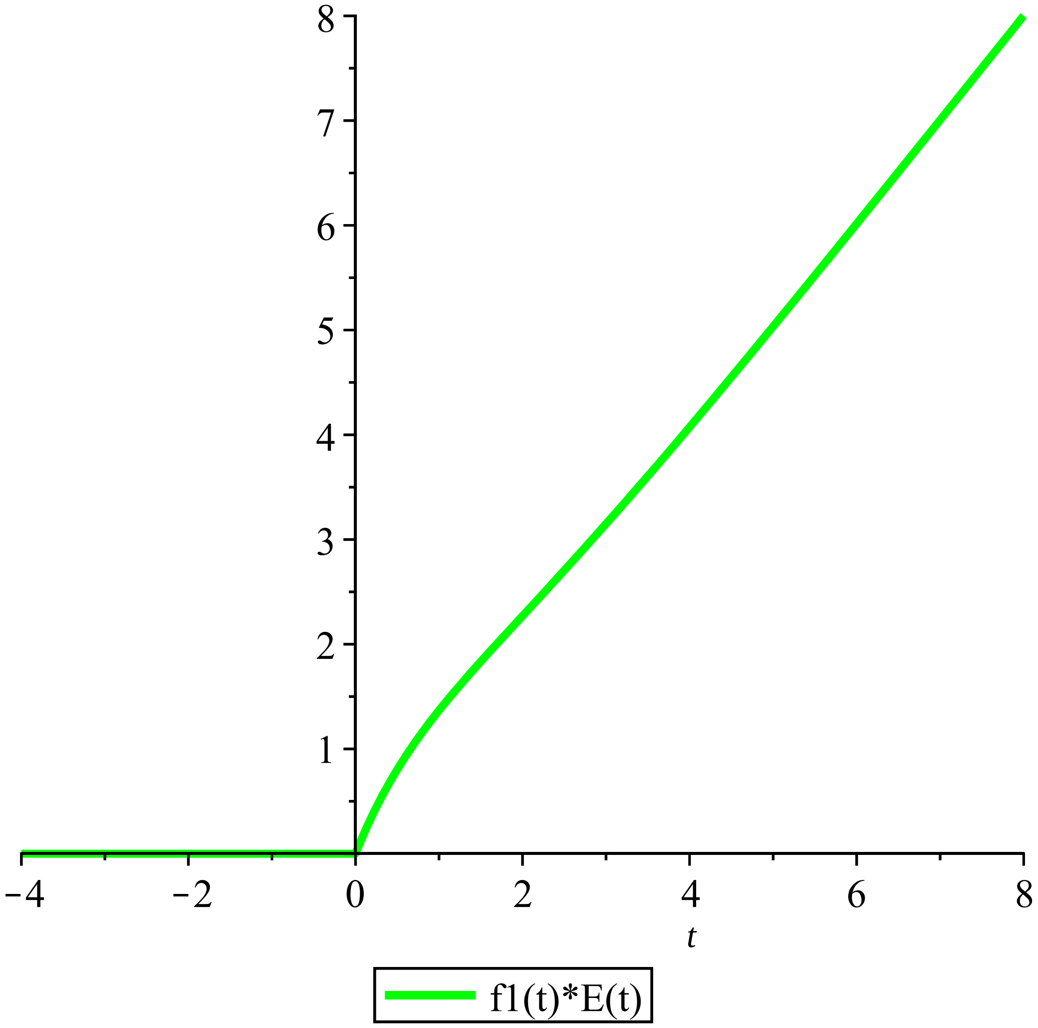
График полученной функции

$sv(t) := piecewise(\, t < 0, sv1(t), t \geq 0, sv2(t)\,) :$

$sv(t)$

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ t\left(e^t + 1\right) e^{-t} & 0 \leq t \end{cases} \tag{11}$$

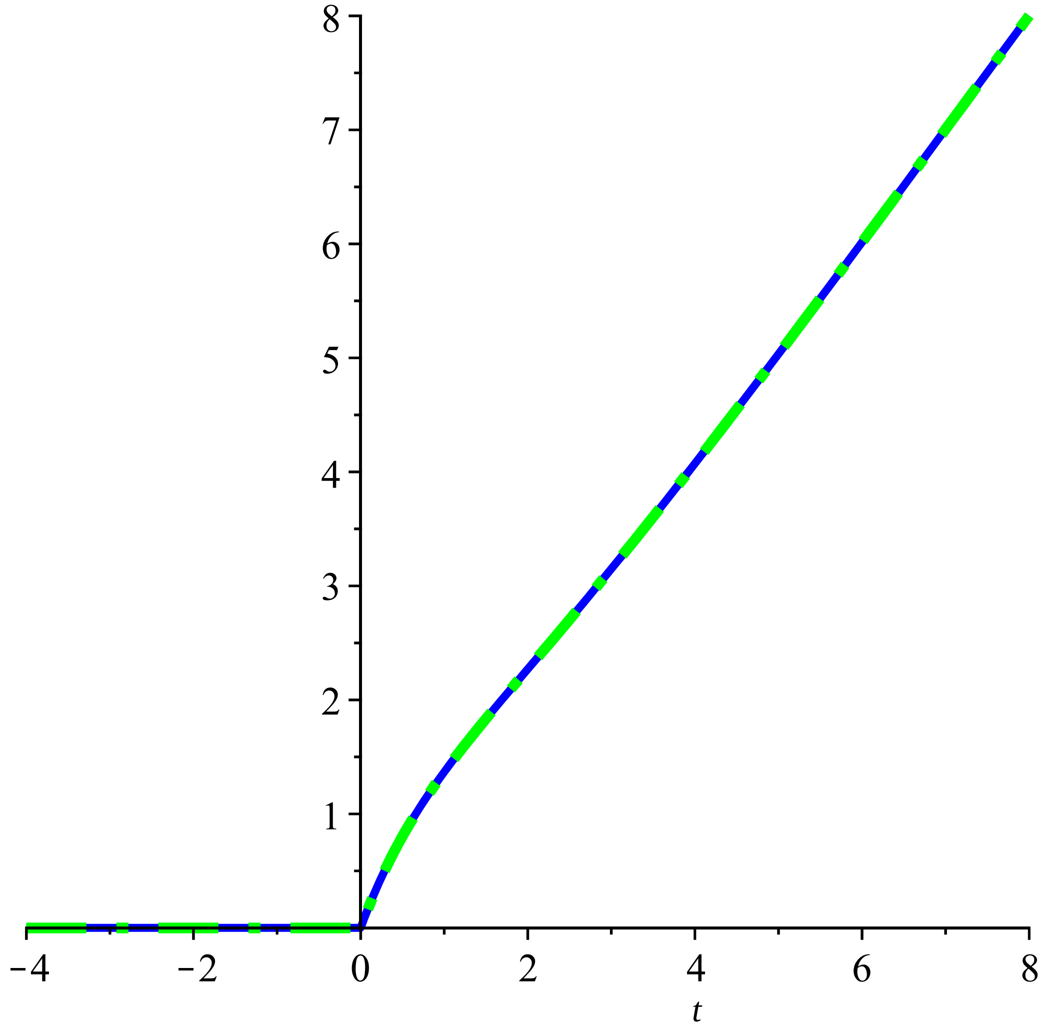
$plot(sv(t), t = -4..8, color = green, thickness = 3, legend = \text{"f1(t)*E(t)"})$



Проверка

$$FG(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f1(\mathrm{tau}) \cdot E(t - \mathrm{tau}) \, \mathrm{dtau} :$$

$plot([sv(t), FG(t)], t = -4..8, color = [blue, green], linestyle = [1, 4], thickness = [3, 4])$



Получили общее решение исходного дифференциального уравнения

$\# \frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} = \exp(-t)\cdot\eta(t):$

$u(t) := sv(t):$

$u(t)$

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ t\,(e^t + 1)\,e^{-t} & 0 \le t \end{cases} \quad \textbf{(12)}$$

Проверка

$assume(t \neq 0):$

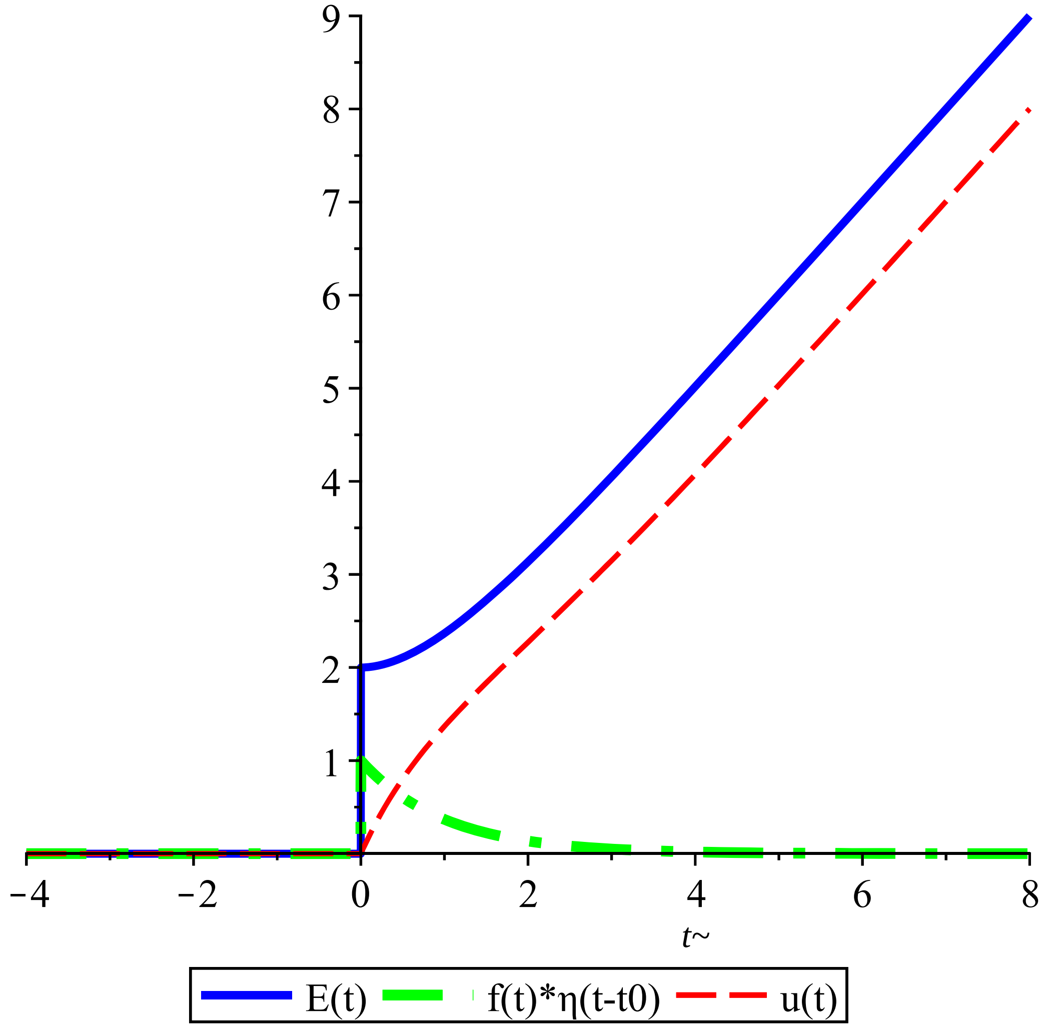
$simplify\left(\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} - \exp(-t)\cdot\eta(t)\right)$

$$0 \quad \textbf{(13)}$$

Проверка пройдена

Построим совмещенные графики E(t), f(t)*η(t-t0),u(t):

plot([*E*(*t*), *f1*(*t*), *u*(*t*)], *t* =−4 ..8, *color* = [*blue*, *green*, *red*], *linestyle* = [1, 4, 3], *thickness* = [3, 4, 2], *legend* = ["E(t)", "f(t)*η(t-t0)", "u(t)"])



9
8
7
6
5
4
3
2
1
-4
-2
0
2
4
6
8
t~
E(t)
f(t)*η(t-t0)
u(t)